

## De oorsprong van het getal

Op een leeftijd van vijf jaar of eerder maken de meeste kinderen in onze westerse cultuur een cognitieve sprong die de mensheid als geheel vele duizenden jaren aan ontwikkeling heeft gekost: het kind verwerft het getalbegrip. Het begint te beseffen dat er iets gemeenschappelijks is in verzamelingen van bijvoorbeeld vijf appels, vijf peren, vijf kinderen, vijf koekjes, een popgroep van vijf musici, enzovoort. Dat gemeenschappelijke, die 'vijfheid', wordt op de één of andere manier gekarakteriseerd door het getal 5, dat wil zeggen door een abstracte entiteit die het kind nooit kan zien, horen, voelen, ruiken of proeven, maar die hem toch de rest van zijn leven vergezellen zal als iets dat 'bestaat'. In feite spelen de getallen 1, 2, 3, ... zo'n belangrijke rol in ons leven, dat ze voor de meeste mensen reëler, concreter, en zeker ook vertrouwd zijn dan de Mount Everest.

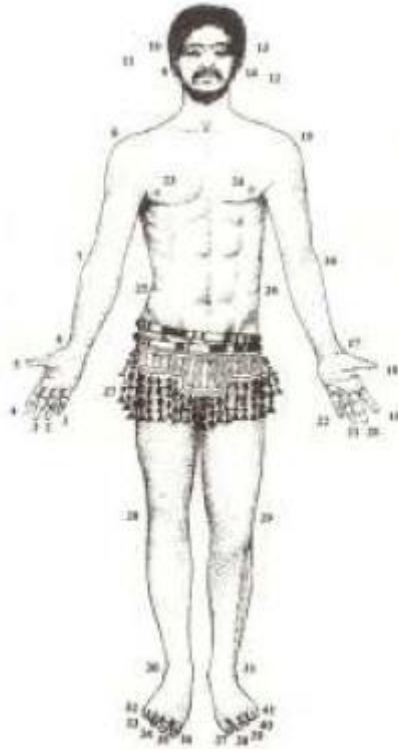
De begripsvorming rond de telwoorden markeert de laatste stap in het herkennen van het *patroon* 'het aantal dingen in een verzameling'. Dat patroon is volledig abstract; in feite is het zo abstract dat het vrijwel onmogelijk is om erover te praten in andere termen dan in die van de getallen zelf. Probeer u maar eens precies uit te leggen wat u bedoelt met een verzameling van vijftientig dingen zonder dat u het *getal* vijftientig noemt. (Bij kleinere aantallen gebruik je al gauw je vingers: een verzameling van vier dingen geef je aan door vier vingers op te steken, en te zeggen: "Zo veel".)

Het werken met abstracties is voor de menselijke geest bepaald niet eenvoudig. Onderzoek heeft inderdaad aangetoond dat het werken met abstracties niet iets is dat aangeboren is, maar iets dat we pas in de loop van onze intellectuele ontwikkeling leren – en vaak met de grootste moeite. Ook het abstracte getalbegrip is waarschijnlijk aangeleerd. Kleine kinderen schijnen het pas te verwerven nadat ze hebben leren tellen. Dat het getalbegrip niet aangeboren is, blijkt ook uit de studie van culturen die zich geïsoleerd van de moderne maatschappij hebben ontwikkeld.

Primitieve culturen hebben in het algemeen een zeer eenvoudig telsysteem. Soms telt men niet verder dan vier. Men begint het tellen met de begrippen 'één' en 'twee' te onderscheiden: alleen of samen. Vervolgens ontstaat 'drie', vaak voorgesteld als de som  $1 + 2$ , en eindigt men bij 'vier', veelal benoemd en soms ook geschreven als  $2+2$ . Daarna wordt er geen onderscheid gemaakt tussen de aantallen groter dan vier. Het is allemaal 'veel'. In deze karikatuur van ons getallensysteem verliezen we de belangrijkste eigenschap van tellen, namelijk dat het nooit ophoudt, dat er oneindig veel natuurlijke getallen zijn. In zo'n 'primitief' systeem gaat tellen eenvoudig van 1, 2, 3, 4, *veel*.

Toch is men zelfs met zo'n elementair getalbegrip in staat om in de dagelijkse praktijk met veel grotere getallen om te gaan. Dat kan bijvoorbeeld door handig gebruik te maken van lichaamsdelen zoals vingers, tenen, ellebogen en knieën. Door creatief genoeg te zijn in het vinden van te onderscheiden lichaamsonderdelen telt men zo in sommige Polynesische culturen gemakkelijk tot over de veertig.

Ook al is er geen apart woord voor 'vijf', je kan op deze wijze toch vaststellen dat bijvoorbeeld het aantal gezinsleden precies op de vingers van één hand te tellen is. Preciezer gezegd, er kan worden vastgesteld dat twee verzamelingen, namelijk enerzijds de vingers aan een hand en anderzijds het aantal leden van het gezin, één op één met elkaar in verband kunnen worden gebracht. Beide bevatten precies evenveel elementen. In veel praktische gevallen is het van groter belang te weten of twee aantallen gelijk zijn, dan het precieze aantal te weten of te kunnen benoemen.



Nog een voorbeeld. Zeg men leeft in een clan van zesentwintig mensen. Maar er bestaat in de gesproken taal geen woord 'zesentwintig' voor dit aantal, het is gewoon 'veel'. Als het er zeventwintig waren geweest, had dit precies hetzelfde aangevoeld. Misschien zoals wij ons nu voelen in een voetbalstadion, waar het totale aantal toeschouwers ons ook ontgaat. Toch kan men nagaan of 's avonds iedereen weer veilig terug in de groep is. 's Ochtends legt iedereen een balletje in een kom en 's avonds neemt men dat balletje er weer uit. Het aantal balletjes dat overblijft is dan het aantal missende personen. Als alle balletjes uit de kom zijn genomen is vastgesteld dat alle zesentwintig personen weer aanwezig zijn, zonder dat het getal 26 ooit expliciet is gemaakt. Er is alleen vastgesteld dat er precies evenveel balletjes als veilig teruggekeerde groepsleden zijn.

Een ander voorbeeld, meer uit onze alledaagse ervaring. Je stapt in de bus en kijkt of er een plaats is. Als je geen vrije stoel ziet heb je vastgesteld dat er precies evenveel passagiers in de bus zitten als er stoelen zijn. Maar het aantal stoelen of passagiers weet je niet precies. Wederom is het voldoende een verband gevonden te hebben tussen het aantal stoelen en het aantal reizigers.

Als bijvoorbeeld een lid van de Vedda-stam in Sri Lanka kokosnoten wil tellen, pakt hij er een aantal stokjes bij, voor iedere kokosnoot één. Elke keer dat hij er een stokje bij neemt, zegt hij: "Dat is één". Maar als je hem na afloop vraagt hoeveel kokosnoten hij heeft, wijst hij eenvoudig naar de stokjes, en zegt: "Zo veel". Hij heeft dus wel een systeem om te tellen, maar in plaats van abstracte getallen te gebruiken, 'telt' hij in termen van concrete stokjes. Dat Vedda-stamlid heeft een telsysteem dat tot onheuglijke tijden teruggaat: het gebruik van een vaste verzameling dingen, bijvoorbeeld stokjes of kiezelsteentjes, om het aantal objecten in een andere verzameling te 'tellen' door bij elk van die objecten een stokje of kiezelsteen te nemen.

Men neemt aan dat de oudste door mensenhand vervaardigde artefacten die met tellen te maken hebben, ingekerfde botjes zijn; sommige daarvan dateren van 35 duizend jaar v. Chr. In bepaalde gevallen schijnen ze gebruikt te zijn als maankalender, waarbij elke kerf met een schijngestalte van de maan correspondeerde. Soortgelijke voorbeelden van tellen door middel van het aanbrengen van een één-aan-één verband, vinden we in alle samenlevingsvormen die nog geen schrift kennen. Kieselstenen en schelpen werden gebruikt bij de volkstellingen in vroege Afrikaanse koninkrijken, en de eerste bewoners van de Nieuwe Wereld gebruikten cacao bonen, maïskorrels, tarwe of rijst om te tellen.

Het Ishango-beentje is een archeologische vondst, die de oudste wiskundige vondst van de mensheid wordt genoemd. Het is een gekerfd beentje, gedateerd op 20.000 jaar v. Chr. Het beentje werd ontdekt door Jean de Heinzelin de Braucourt, in dienst van het Koninklijk Belgisch Instituut voor Natuurwetenschappen. Het beentje werd genoemd naar Ishango, in Congo op 15 kilometer van de Evenaar, aan de oever van het Edwardmeer. Lange tijd heeft men gespeculeerd over de betekenis van deze tekens op het beentje: een maankalender, een verzameling priemgetallen, een wiskundig spel of een telstaaf. Onderzoek door een team van archeologen, wiskundigen en ingenieurs heeft nu aangetoond dat het wel degelijk telstokjes betroffen.



We kunnen de redenering ook omdraaien en beweren dat uit deze bijecties van concrete verzamelingen abstracte getallen ontstaan. Er zijn allerlei verzamelingen om ons heen en deze vallen uiteen in categorieën van verzamelingen waarvan we kunnen vaststellen dat ze even groot zijn. We kunnen nu afspreken dat we twee verzamelingen, vanuit een bepaald perspectief, als identiek beschouwen als ze evenveel elementen hebben. Dat wil zeggen, we kijken door een zeer grove bril waarbij we alleen oog hebben voor het aantal elementen en verder niet geïnteresseerd zijn in het wat en hoe van de elementen.

Daarmee vallen allerlei verzamelingen samen, zeg de verzameling van 'drie knikkers', 'drie kikkers', 'drie appels' etc. Al deze verzamelingen hebben 'drie' als een gemeenschappelijke factor. Dit leidt tot een abstractie, 'de verzameling met drie elementen'. Deze 'equivalentieklasse' van verzamelingen kunnen we nu met een abstract symbool weergeven. Hiertoe kiezen we het symbool 3 en we spreken dit uit als 'drie'! Een blik op een telboek voor kleuters leert ons dat dit inderdaad de manier is hoe we een getal leren, namelijk als het gemeenschappelijke van allerlei verzamelingen. Door het kind genoeg te laten oefenen met concrete voorbeelden ontstaat langzamerhand het abstracte en overkoepelende getalsbegrip. Wiskundigen hebben deze achterliggende verbanden gebruikt om een definitie te geven van de natuurlijke getallen. We noemen twee verzamelingen *gelijkmachtig* als er een bijectie bestaat tussen deze verzamelingen. Een *bijectie* is een verband waarbij met elk element van de ene verzameling juist één element van de andere verzameling overeenkomt en omgekeerd. Als de verzamelingen eindig zijn betekent dit dat ze evenveel elementen bevatten.

In de verzameling van alle verzamelingen hebben we alzo een relatie gedefinieerd : ... is gelijkmachtig met ... Deze relatie is reflexief ( elke verzameling is gelijkmachtig met zichzelf ) , symmetrisch ( als een verzameling A gelijkmachtig is met B dan is ook B gelijkmachtig met A) en transitief ( Als A gelijkmachtig is met B en B gelijkmachtig is met C, dan is ook a gelijkmachtig met C ). Een dergelijke relatie noemt men een *equivalentierelatie*. Een equivalentierelatie verdeelt de verzameling van alle verzamelingen onder in (equivalentie) klassen. In zo een klasse zitten allemaal verzamelingen die onderling gelijkmachtig zijn. Zo een klasse is bijvoorbeeld de klasse met als elementen {ja}, {Piet},{5},...: dus allemaal verzamelingen die als gemeenschappelijk kenmerk hebben dat ze 1 element bevatten. We noemen deze klasse het getal 1. Een *natuurlijk getal* is dus de naam van de equivalentieklasse van allemaal verzamelingen die als gemeenschappelijk kenmerk hebben dat ze onderling verbonden kunnen worden door middel van een bijectie.

Natuurlijk heeft zo'n telsysteem het nadeel dat het niets zegt over de aard van de dingen die geteld worden. Een stel kerfjes, steentjes of schelpjes geeft alleen maar een aantal aan; het kan dus niet gebruikt worden om extra informatie voor langere tijd op te slaan. Het eerste telsysteem waarbij voor dit probleem een oplossing gevonden werd, ontstond in het gebied dat bekend staat als de Vruchtbare Halve Maan, en dat zich uitstrekt van het tegenwoordige Syrië tot aan Iran.

Gedurende de jaren zeventig en in het begin van de jaren tachtig deed antropologe Denise Schmandt-Beserat van de universiteit van Texas in Austin onderzoek naar voorwerpen van klei die bij archeologische opgravingen op verschillende plaatsen in het Midden Oosten tevoorschijn waren gekomen. Bij elke opgravingplaats vond ze naast de gebruikelijke verzameling potten, bakstenen, poppetjes en dergelijke, ook een aantal zorgvuldig vervaardigde kleivormpjes, allemaal 1 tot 3 centimeter groot: bolletjes, schijfjes, kegeltjes, viervlakken, eivormige figuurtjes, cilinders, driehoekige en rechthoekige blokjes, enzovoort. De oudste dateerden van circa 8000 v. Chr., kort nadat de mensen daar een vorm van landbouw waren gaan ontwikkelen, en ze methoden moesten bedenken om de oogst in goede banen te leiden en voorraden graan op te slaan voor later gebruik.

Georganiseerde landbouw vraagt om middelen om ieders aandeel te administreren, om afspraken over toekomstige werkzaamheden vast te leggen en om ruilhandel te organiseren. De kleifiguurtjes die Schmandt-Beserat bestudeerde, hadden waarschijnlijk die functie. De verschillende vormen dienden om de aard van de dingen te identificeren die werden geteld.



Zo zijn er bijvoorbeeld aanwijzingen dat de cilindertjes werden gebruikt voor het tellen van dieren. Kegeltjes en bolletjes stonden voor de twee gebruikelijke inhoudsmaten voor graan (respectievelijk ongeveer 7 en 10 liter) en met een cirkelschijfje werd een kudde vee

aangegeven. Behalve voor het handig vastleggen van iemands bezittingen konden de kleifiguurtjes ook goed gebruikt worden bij het vastleggen van afspraken en bij de ruilhandel.

Omstreeks 6000 v. Chr. had het gebruik van zulke kleifiguurtjes zich over het hele gebied verspreid. Ze bleven in aard en functie grotendeels ongewijzigd, tot rond 3000 v. Chr. De steeds complexer wordende samenleving van de Sumeriërs, die tot uiting kwam in het ontstaan van steden, de opkomst van de Sumerische tempeldienst en de ontwikkeling van een overheidsapparaat, leidde tot meer gedifferentieerde vormen. Ze kregen allerlei nieuwe gedaanten, onder meer met ruiten, gebogen spiralen en parabolen. Er werden soms ook merktekens op gezet. Terwijl de gewone blokjes in gebruik bleven in de landbouw, kwamen deze meer gecompliceerde figuurtjes vooral in zwang om dingen als sierraden, metalen voorwerpen, oliekruiken en broden te tellen.

De Sumerische maatschappij was inmiddels toe aan de volgende grote stap in de ontwikkeling van het getalbegrip. Toen in de periode van 3300 tot 3250 v. Chr. De bureaucratie een steeds hogere vlucht nam, raakten er twee verschillende methoden in gebruik om die telblokjes samen te nemen. In de grotere, gewaarmerkte blokjes werd een gat gemaakt. Met een touwtje werden ze vervolgens vastgebonden aan een langwerpige kleitablet met daarop de naam van de bezitter. De kleinere figuurtjes werden bewaard in dichtgemaakte kleine potjes met een diameter van 5 tot 7 centimeter waarop de inhoud vermeld stond. Zowel de tabletten als de verzegelde potjes dienden dus als hulpmiddelen bij de boekhouding of het opstellen van contracten.

Natuurlijk was een nadeel van de verzegelde kleipotjes dat je het zegel moest verbreken om de inhoud te bekijken. De Sumerische boekhouders hadden daarom de gewoonte om afdrukken te maken van de figuurtjes in de zachte buitenkant van de potten voordat ze dichtgemaakt werden, zodat je al van buiten kon zien wat erin zat.

Maar als de inhoud aan de buitenkant zichtbaar is, dan is de inhoud zelf eigenlijk niet meer nodig. Alle benodigde informatie staat immers al buitenop. De blokjes zelf konden worden weggedaan, en dat gebeurde een paar generaties later dan ook. Het resultaat was de geboorte van de kleitablet waarop de ingedrukte merktekens – en die merktekens alleen - dienen om gegevens vast te leggen die eerder door telblokjes waren voorgesteld. In moderne taal zouden we zeggen dat de Sumerische boekhouders de concrete telblokjes hadden vervangen door geschreven *getallen*.

Vanuit het cognitief standpunt is het interessant om op te merken dat de Sumeriërs niet direct overstapten van echte blokjes in een verzegeld en gewaarmerkt omhulsel naar het gebruik van merktekens op een losse tablet. Een tijd lang bleven de gemarkeerde kleipotjes ook nog de echte blokjes bevatten waarvan de afdrukken op de buitenkant stonden. Die blokjes beschouwde men dan als representanten van hoeveelheden graan, schapen of wat dan ook. De tekens op de buitenkant zag men echter niet als representanten van de echte objecten, maar als representanten van de blokjes die erin zaten. Dat het zo lang duurde voordat men de overbodigheid van de blokjes inzag, duidt erop dat het overgaan van fysieke objecten naar abstracte representaties ervan, een aanzienlijke cognitieve stap is.

Natuurlijk betekent de overstap op een symbolische representatie van een hoeveelheid graan op zichzelf nog niet dat men reeds een abstract getalbegrip, in de moderne betekenis van het woord, heeft verworven. Tegenwoordig zien we getallen als 'dingen', als 'abstracte objecten'. Het is moeilijk precies te zeggen wanneer de mensheid dat stadium bereikt heeft, net zo goed als het moeilijk is om bij de ontwikkeling van een kind dat moment precies aan te wijzen. Zeker is het dat toen in de Sumerische samenleving eenmaal de telblokjes waren afgeschaft, de begrippen 'eenheid', 'tweeheid', 'drieheid', enzovoort, begonnen te functioneren, want dat is precies wat die merktekens op die kleitabletten representeerde.

Bronnen :

Wiskunde, wetenschap van patronen en structuren : Keith Devlin , Natuur en Techniek

Denkpatronen : hoe wiskunde en logica werken : Johan van Benthem en Robbert Dijkgraaf