Wiskunde in het oude Egypte

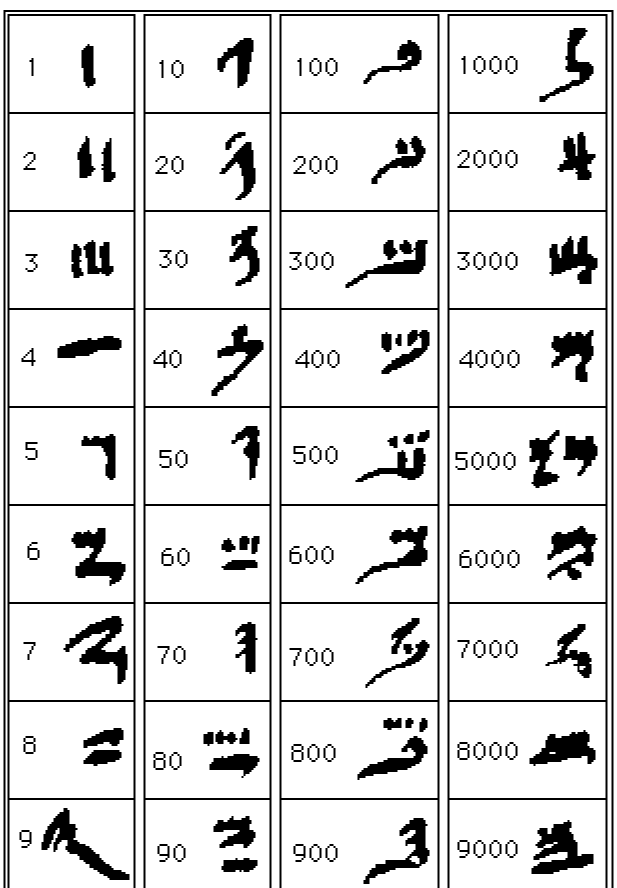
1. Inleiding

Onze kennis van de Egyptische wiskunde wordt beperkt door de weinige bronnen. Het grootste deel komt van het Rhind-papyrus , dat overgeschreven is van het origineel, daterend uit het Midden-Rijk (ca. 2050-1800 v.C.). Tijdens deze periode werden ook de andere gekende bronnen geschreven, zoals de Egyptische wiskundige leren rol en andere (minder uitgebreide), waaronder het Moskou-papyrus, het Kahun-papyrus en het Berlijn-papyrus.

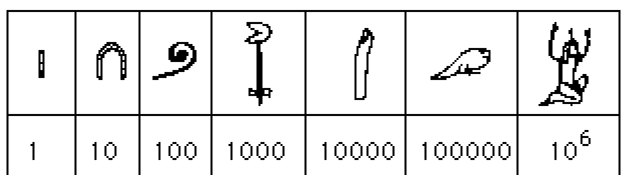
Het Rhind-papyrus, genoemd naar de persoon die het kocht in Luxor, is het oudste wiskundige geschrift van de wereld. Origineel was het een tekst geschreven door een leraar voor zijn leerlingen, de koninklijke schrijvers uit die tijd. Het is overgeschreven door Ahmes in ca. 1600 en bevat 87 wiskundige problemen met oplossingen. De wiskundige leren rol lijkt meer op een studentennotititieboek.

2. Talstelsel

De Egyptenaren gebruikten een systeem met een 10-tallig stelsel. Ze hadden twee manieren om getallen op te schrijven. Hiërogliefen, die gebruikt werden om in steen te schrijven en het hiëratisch schrift dat gebruikt werd om op papyrus te schrijven. De Egyptenaren schreven van rechts naar links en de symbolen voor de getallen wezen naar de richting van waaruit geschreven wordt. Omdat de schriften veranderden in de loop van de tijd worden hier de symbolen weergegeven uit 1800 v.C. De numerieke symbolen voor het hiëratisch schrift en de hiërogliefen zien er als volgt uit:



Egyptische nummers in het Hiëratisch schrift

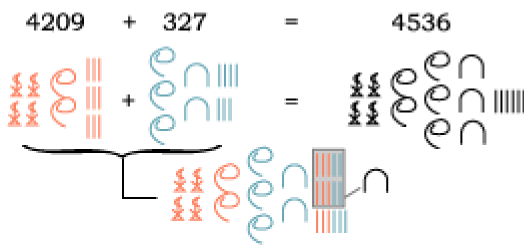


Egyptische nummers in hiërogliefen

3. Optellen en aftrekken:

Voor optellen met het hiëratisch schrift werden waarschijnlijk sommige sommen vanbuiten geleerd of een opteltabel gebruik. Deze tabellen werden waarschijnlijk ook voor het aftrekken gebruikt en men zei dus in de plaats van 8 min 3, hoeveel is nodig om van 3 een 8 te maken. Zo vind je voor: 4209 – 327
Om van 327 4209 te maken: (327 = 7 + 20 + 300) + **3** (=330) + **70** (=400) + **600** (=1000) + **3000** (=4000) + **200** (=4200) + **9** (=4209) → **3 + 9 + 70 + 600 + 200 + 3000** = 3000 + 800 + 70 + 12 = 3882.

Met hiërogliefen moet men gewoon doortellen en dus gewoon een aantal symbolen bijschrijven of wegdoen en 10 eenheden vervangen door één tiental, 10 tientallen door één honderdtal, … of omgekeerd.



4. Vermenigvuldigen en delen:

Om 2 getallen te vermenigvuldigen wordt één van de 2 als vermenigvuldiger gekozen, deze blijft men met 2 vermenigvuldigen tot de som van de tussenvermenigvuldigers de vermenigvuldiger is (niet alle tussenvermenigvuldigers moeten opgeteld worden). Zo vinden we voor 11.8:

11.8

tussenvermenigvuldigers (vetgedrukt telt mee)

1 8 men blijft 1 (en dus ook 8) met 2 vermenigvuldigen totdat de som van de

2 16 tussenvermenigvuldigers (die je meetelt om 11 te bekomen) 11 is. Dan telt men

4 32 de som van de producten van 8 die je meegeteld hebt op en verkrijgt men 88.

8 64

+ ------

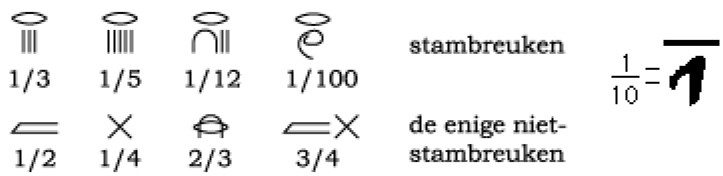
11 88

Deze manier werkt altijd omdat elk natuurlijk getal te schrijven is als een som van machten van 2. Of dit al gekend was bij de Egyptenaren is niet bekend. Ook al lijkt deze manier onhandig, toch werd ze duizend jaar erna nog gebruikt. De eigenschap zelf wordt nu nog steeds door computers in het binaire stelsel gebruikt.

Het delen lijkt op het vermenigvuldigen, een Egyptenaar zegt in de plaats van hoeveel is 88 gedeeld door 8, welk getal moet ik met 8 vermenigvuldigen om 88 te bekomen. Zo kan de oefening hierboven ook dienen als voorbeeld voor het delen (van 88 door 8).

5. Breuken:

De Egyptenaren gebruikten vooral breuken wanneer een deling 'niet uitkwam' . Ze kenden ook alleen breuken met als teller 1, zogenaamde stambreuken. Als ze dus met rekenen een breuk kregen, waarbij de teller niet 1 is, dan werd de breuk opgesplitst in een aantal eenheidsbreuken[1]. Zo kan men 3/4 schrijven als 1/2 + 1/4. Stambreuken hebben een eigen schrijfwijze, bij de hiërogliefen schrijft men een 'mond' boven de noemer en bij het hiëratisch schrift een lijn boven de noemer. Men had 4 breuken met hun eigen symbolen, waaronder de 2 enigste vaak gebruikte niet-stambreuken 2/3 en3/4.



Om zo'n deling die 'niet uitkomt'uit te rekenen gebruikten de Egyptenaren verdubbelen en halveren, zo vinden we voor 19/8:

1 8 men blijft 8 vermenigvuldigen met 2 of 1/2 totdat de som van de oplossingen

2 16 die je meetelt (vetgedrukt) 19 is. Dan telt men de meegetelde

1/2 4 tussenvermenigvulders op en vindt men 2 + 1/4 + 1/8.

1/4 2

1/8 1

+ ------

2 + 1/4 + 1/8 = 19/8

Hierin zie je dat de Egyptenaren vaak werkten met de rij 1/2, 1/4, 1/8, … Omdat men hiermee alleen niet alle delingen kan uitvoeren zijn er nog andere rijen en werden er ook allerlei rekentrucs gebruikt.

6. Rekentrucs/Regels:

Om de delingen makkelijker te maken werden deze rekentrucs of regels gebruikt. Zo hadden de Egyptenaren waarschijnlijk de G-regel, deze zegt: Als een eenheidsbreuk het dubbele is van een andere, dan is hun som een andere eenheidsbreuk als en slechts als de grotere noemer deelbaar is door 3. Het resultaat van deze deling (van de grootste noemer door 3), als noemer van de nieuwe eenheidsbreuk is gelijk aan som van de originele eenheidsbreuken.
De Egyptenaren zouden de G regel misschien nog hebben uitgebreid: Als een van de twee eenheidsbreuken k maal de ander is, dan is hun som de eenheidsbreuk met als noemer, de grotere noemer gedeeld door (k + 1), aangenomen dat het resultaat een geheel getal is. Een voorbeeld van elk:

G-regel: 1/9 + 1/18 = 1/6 & Uitgebreide G-regel: 1/10 + 1/40 = 1/8

[1] J.J. Sylvester (1814 - 1897) bewees dat elke breuk kan worden geschreven als de som van een aantal stambreuken.

Het bewijs voor de uitgebreide G-Regel is vrij simpel en geven we op de linkerlid rechterlid methode:

$$\frac{1}{x} = k.\frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y}{k+1}}$$

$$RL: \frac{1}{x}+\frac{1}{y} = \frac{1}{\frac{y}{k+1}} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{\frac{y}{k+1}} - \frac{1}{y} \Leftrightarrow \frac{1}{x} = \frac{1}{y}.(k+1-1) = \frac{1}{x} = k.\frac{1}{y} : LL$$

Ook voor twee derde van een stambreuk te berekenen hadden de Egyptenaren regels:
Voor een stambreuk met oneven noemer vermenigvuldigen we de noemer eens met 2 en dan met 6.We tellen deze twee stambreuken op om twee derde van de originele stambreuk te vinden. (Voor een even stambreuk wordt de helft van de noemer opgeteld bij de noemer.) Een voorbeeld van elk:

$$oneven: \frac{2}{3}.\frac{1}{5} = \frac{1}{10}+\frac{1}{30} \left(= \frac{4}{30} = \frac{2}{15}\right) \ \&\ even: \frac{2}{3}.\frac{1}{8} = \frac{1}{8+4} = \frac{1}{12}$$

Voor de gemakkelijkheid waren er voor veel van deze regels tabellen, zo is er de Recto tabel, waarin de deling van 2 door de oneven getallen 3 tot en met 101 staat en de twee derde tabel. De tabel is zo groot dat ze bijna een derde van het Rhind-papyrus in beslag neemt.

De Egyptenaren gebruikten de breuk twee derde zo vaak dat men buiten een apart teken ook een tabel ervoor hadden. Voor het berekenen van een derde van een getal werd zelfs eerst twee derde van het getal uitgerekend en de uitkomst daarvan werd gehalveerd, in plaats van gewoon door 3 te delen. Dit werd zelfs gedaan bij het uitrekenen van een derde van 3 en bij het uitrekenen van een derde van 1.

7. Toepassingen:

De wiskunde van de oude Egyptenaren wordt vaak gezien als toegepaste rekenkunde. Dit is omdat de toepassingen vaak op de dagelijkse praktijk gericht waren, zoals het verdelen van hoeveelheden, het bepalen van oppervlakte en inhoud, en dergelijke.

1. Oppervlakte- en inhoudberekening:

De oppervlakte van een rechthoek en een driehoek werden op dezelfde manier als vandaag uitgerekend. Het berekenen van de oppervlakte van een cirkel werd anders gedaan: Haal van de diameter 1/9 af en kwadrateer de rest. Met deze methode komt men vaak in de buurt van de echte oppervlakte. Dit is omdat de waarde, die wij nu kennen als pi, dicht bij deze die wij nu hebben ligt. Vergeleken met onze formule voor een cirkel, komen we uit op een waarde voor pi van 256/81, wat ongeveer 3,1605 is. Voor de Inhoud van een cilinder te berekenen gebruikten de Egyptenaren dezelfde formule als wij, maar omdat ze de oppervlakte van de cirkel anders berekenden is de inhoud wel verschillend. Hoewel de piramiden het meest bekende is wat de oude Egyptenaren ons nalaten, zijn er weinig berekeningen nodig voor het bouwen ervan gevonden. We weten wel dat ze de helling van de zijden van een piramide konden berekenen en de inhoud van een afgeknotte piramide konden berekenen. Men weet dit laatste door een voorbeeld van zo'n berekening in het Moskou-papyrus. Hieruit kunnen we dus ook concluderen dat ze de inhoud van een gewone piramide konden berekenen.

2. Vergelijkingen:

Buiten voorbeelden uit de praktijk werden er ook vergelijkingen gevonden zonder praktische toepassing. De vergelijkingen van de eerste graad in het Rhind-papyrus worden opgelost met 'false position', hierbij neemt men voor de onbekende een getal waarmee de berekeningen zo simpel mogelijk wordt en past het daarna aan door te zien hoe dicht het bij de uitkomst ligt. Een voorbeeld van zo'n vergelijking:
Een hoeveelheid en 1/7 daarvan zijn samen 19 $\left[x+\frac{x}{7}=19\right]$. Wat is de hoeveelheid? We nemen dus eerst als onbekende een getal dat het makkelijkste is om de berekeningen mee uit te voeren, dit is 7. Dus 7 + 1/7 van 7 is 8. Nu moet 8 een aantal keer vermenigvuldigd worden om tot 19 te komen. Zo vaak moet ook de hoeveelheid, 7, vermenigvuldigd worden. In het Moskou-papyrus gebruikt men de moderne manier. Toegepast op het vorige voorbeeld geeft dit:

$$x+\frac{x}{7}=19 \Leftrightarrow \frac{8}{7}x=19 \Leftrightarrow x=19.\frac{7}{8} \Leftrightarrow x=\frac{133}{8}$$

Men heeft niet veel tweede graadsvergelijkingen gevonden, maar in het gerestaureerde Berlijn Papyrus vindt men er één. Omdat een deel gerestaureerd is kan het origineel een beetje anders geweest zijn, maar omdat het maar een klein deel is, zal dit waarschijnlijk niet zo zijn. Het probleem gaat als volgt:

De oppervlakte van een vierkant van 100 [vierkante meter] is gelijk aan de oppervlakte van twee kleinere vierkanten. De zijde van de één is 1/2 + 1/4 van de zijde van de andere. Geef de zijdes van de twee onbekende vierkanten.

Neem altijd een vierkant met zijde 1. Dan is de zijde van de andere 1/2 + 1/4.
Vermenigvuldig dit met 1/2 + 1/4. Dat wordt 1/2 + 1/16, de oppervlakte van het kleine vierkant.
Dan hebben deze twee vierkanten samen een oppervlakte van 1 + 1/2 + 1/16.

Om vanuit de som van de oppervlakten de zijdes te vinden, gebruiken de Egyptenaren eigenlijk de moderne methode, alleen vullen ze voor één van de onbekende 1 in en passen deze daarna aan. $\left(x^2+y^2=100 \;\&\; \frac{3}{4}x=y \;\rightarrow\; x^2+\frac{9}{16}x^2=100 \;\rightarrow\right) \frac{25}{16}x^2=100$ *en hieruit vinden we dat de zijdes 8 en 6 moeten zijn.*

Neem de wortel van 1 + 1/2 + 1/16. Dit is 1 + 1/4. $\qquad \frac{5}{4}x=10$
Neem de wortel van de 100, dit is 10.
Deel deze 10 door deze 1 + 1/4. $\qquad x=\frac{10}{\frac{5}{4}}$

Dat wordt 8, de zijde van een vierkant.
Neem 1/2 + 1/4 van deze 8. Dat wordt 6, de zijde van het andere vierkant. $\qquad x=8 \rightarrow y=6$

Belangrijkste Bronnen:

http://www.win.tue.nl/~hemerik/2R930/Scripties/HoC_Scr2004_Hellegers/hoc/hoc.html
http://www.math4all.nl/Wiskundegeschiedenis/Onderdelen/RGEgypte.html